ANNÉE 1976

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE L'AIR

(Elèves Officiers de l'Air, Elèves Officiers Mécaniciens de l'Air, Elèves Officiers des Bases de l'Air)

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures)

Dans tout le problème, **R** *désigne l'ensemble des réels.*

E est un **R** — espace vectoriel, non réduit au vecteur nul; $\mathfrak{L}$ l'ensemble des endomorphismes de E. On sait que $\mathfrak{L}$, avec les trois opérations : composition, addition, multiplication externe par un réel, a une structure d'algèbre comprenant l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$, l'anneau $\mathfrak{L}$.

Le problème consiste en l'étude des éléments u de $\mathfrak{L}$ vérifiant :

$$u^2 = \alpha\, i \qquad u^2 = u_0\, u$$

α réel quelconque; i l'application identique de E.

Les différentes parties du problème sont dans une large mesure indépendantes.

On rappelle que deux matrices carrées sont semblables si, pour des bases convenables, elles définissent le même endomorphisme.

— I —

On suppose α strictement négatif.

Montrer que u et i, dans l'espace vectoriel $\mathfrak{L}$, forment un système libre.

Soit $\mathfrak{L}_1$ le sous-espace engendré par u et i; montrer que $\mathfrak{L}_1$ définit aussi un sous-anneau de l'anneau $\mathfrak{L}$.

Ce sous-anneau est-il un corps? En déduire que tous les éléments de $\mathfrak{L}_1$ sont des automorphismes de E.

Soient α et β deux réels strictement négatifs, u et v deux endomorphismes de E vérifiant :

$$u^2 = \alpha\, i \qquad v^2 = \beta\, i$$

$\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}'_1$ les sous-espaces engendrés respectivement par u et i et par v et i.

Montrer qu'on peut établir entre $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}'_1$ un isomorphisme d'algèbre, pour les trois opérations.

Indication : cet isomorphisme est de la forme :

$$\mathfrak{L}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{L}'_1$$

$$xi + yu \to xi + \lambda\, yv$$

λ étant un réel à déterminer.

— II —

On a toujours α strictement négatif $u^2 = \alpha\, i$.

1. — $\vec{a}$ étant un vecteur de E, $\vec{a} \neq \vec{0}$, montrer que $\vec{a}$ et $u(\vec{a})$ forment un système libre de E.

Soit F_a le sous-espace de E engendré par $\vec{a}$ et $u(\vec{a})$.

Montrer que F_a est stable pour u (c'est-à-dire $\vec{x} \in F_a \Rightarrow u(\vec{x}) \in F_a$).

. . . /. . .

Soit G un sous-espace de E, également stable pour u.

Montrer que :

$$\left.\begin{matrix} F_a + G \\ F_a \cap G \end{matrix}\right\} \text{ sont stables pour } u.$$

Montrer que si $\vec{a}$ n'est pas élément de G, on a : $F_a \cap G = \{\vec{0}\}$.

2. — Supposons E de dimension finie. Montrer qu'on peut trouver p vecteurs $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_p}$ tels que :

$$E = F_{a_1} \oplus F_{a_2} \oplus F_{a_3} \oplus \ldots \oplus F_{a_p}$$

En déduire que E est de dimension paire.

3. — On peut donc prendre pour base de E les vecteurs :

$$\vec{a_1},\ \vec{a'_1} = u(\vec{a_1}),\ \vec{a_2},\ \vec{a'_2} = u(\vec{a_2}),\ \ldots,\ \vec{a_p},\ \vec{a'_p} = u(\vec{a_p}).$$

Quelle est la matrice de u rapportée à cette base ?

Réciproquement : soit une matrice de cette forme, rapportée à une base quelconque, définit-elle une application u telle que $u^2 = \alpha\, i$.

— III —

On suppose maintenant $\alpha = 0$; u vérifie donc :

$$u^2 = 0 \qquad \text{(application constante zéro).}$$

Montrer que l'ensemble des vecteurs propres de u est confondu avec le noyau de u (ou ker u).

Soit E de dimension finie n; A la matrice de u pour une base quelconque. Montrer que si u n'est pas l'application constante zéro, A n'est pas diagonalisable (c'est-à-dire n'est pas semblable à une matrice diagonale).

Soit $\vec{a}$ un vecteur de E non propre pour l'application u. Montrer que $\vec{a}$ et $u(\vec{a})$ forment un système libre de E.

En déduire que si $n = 2$, u étant toujours différente de l'application zéro, toute matrice de u est semblable à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

— IV —

On prend maintenant α strictement positif :

$$u \text{ vérifiant toujours } \qquad u^2 = \alpha\, i$$

1. — Montrer que l'application u n'a que deux valeurs propres possibles.

2. — On suppose E de dimension finie n; A la matrice de u pour une base quelconque. Montrer que le polynôme caractéristique de A a n racines réelles (les racines multiples étant évidemment comptées plusieurs fois).

3. — Montrer que ce polynôme caractéristique a n racines confondues seulement pour deux matrices diagonales A_1 et A_2.

(On pourra utiliser l'égalité :

$$A^2 - \alpha\, I = (A - \sqrt{\alpha}\, I)(A + \sqrt{\alpha}\, I)$$

I étant une matrice unité).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail